

数据通信复习总结上

hycoder

2.2.7

数据通信复习总结上

一、数据及光纤通信系统构成的相关问题

1.1 数据传输

1.1.1 数据通信的定义

1.1.2 数据信号的三种传输方式

1.2 数据通信系统构成及各单元作用

1.2.1 数据通信系统

1.2.2 数据通信系统的构成

1.2.3 数据通信系统各主要部件功能

1.3 光纤通信系统的构成及各部件的作用

1.3.1 光纤的定义

1.3.2 光纤通信系统的构成

1.3.3 光纤通信系统各部件的作用

1.4 光纤透光窗口特性

二、数据及光纤通信系统传输的相关问题

2.1 性能指标

2.1.1 调制速度

2.1.2 数据传信速率

2.1.3 数据传送速率

2.1.4 频带利用率

2.1.5 差错率

2.2 数据信号的基带传输

2.2.0 常见的信号编码

2.2.1 码间串扰ISI

2.2.2 理想低通传输特性

2.2.3 具有幅度滚降特性的低通形成网络

2.2.4 部分响应系统

2.3 数据信号的频带传输

2.3.1 振幅调制2ASK

2.3.2 相位调制2PSK

2.3.3 频率调制2FSK

三、差错控制及编码相关问题

3.1 差错控制

3.1.1 差错控制的基本思路

3.1.2 差错控制方式

3.2 汉明距离，纠检错能力

3.2.1 汉明距离

3.2.2 纠检错能力

3.3 线性分组码、循环码的特性

3.3.1 线性分组码的特性

3.3.2 汉明码的特性

3.3.3 循环码的特性

3.4 监督矩阵，生成矩阵，码的生成多项式

一、数据及光纤通信系统构成的相关问题

- 涉及画图，简答等；
- 1.1数据传输；
 - 1.2数据通信系统构成，各单元作用；
 - 1.3光纤通信系统的构成及各部件的作用；
 - 1.4光纤透光窗口特性。

1.1数据传输

1.1.1数据通信的定义

依照**通信协议**，利用**数据传输技术**在两个**功能单元**之间**传递数据**信息，它可实现**计算机与计算机**、**计算机与终端**或**终端与终端**之间的数据信息传递。

1.1.2数据信号的三种传输方式

数据通信中**数据信号**基本传输方式有三种：**基带传输**，**频带传输**和**数字传输**。

1. 基带传输：不搬移基带信号频谱直接传输基带信号。
2. 频带传输：需要经过调制将基带信号的频谱搬移到相应的载频频带再进行传输。
3. 数字传输：在数字信道中传输数据信号称为数据信号的数字传输，简称数字数据传输。

1.2数据通信系统构成及各单元作用

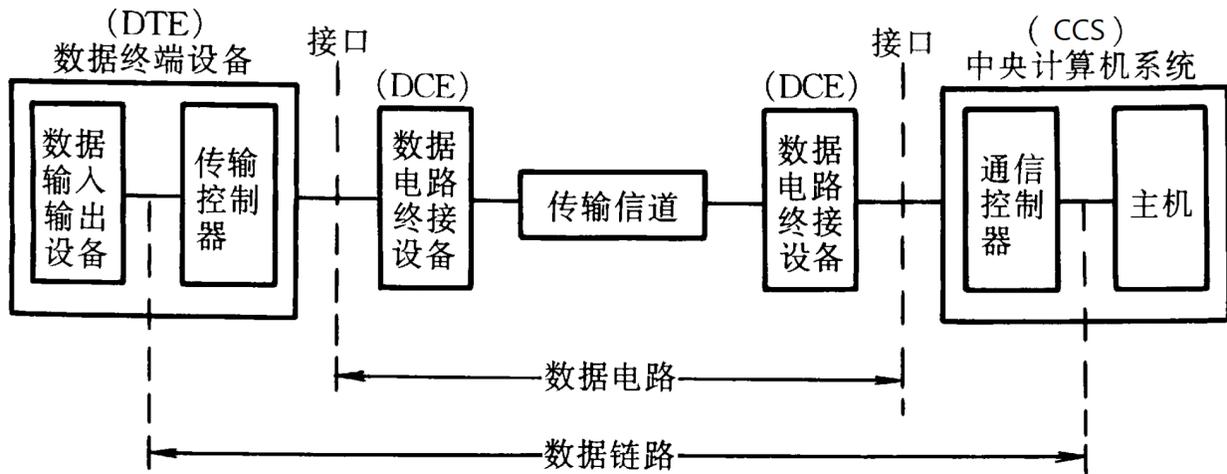
1.2.1数据通信系统

通过**数据电路**将分布在远端的**数据终端设备**与**计算机系统**连接起来，实现**数据传输**、**交换**、**存储**和**处理**的系统。

1.2.2数据通信系统的构成

典型的数据通信系统主要由三部分构成：

1. 数据终端设备(DTE)
2. 数据电路(DC)
3. 中央计算机系统(CCS)



1.2.3 数据通信系统各主要部件功能

1. 数据终端设备 (DTE)

- **组成**：数据终端设备由**数据输入输出设备**和**传输控制器**组成。
- **传输控制器**：完成各种传输控制，如差错控制、终端的接续控制、确认控制。
- **DTE的作用**：把信息变成以数字代码表示的数据，并把这些数据传送到远端的计算机系统。也可以是相反的作用。

2. 数据电路 (DC)

- **组成**：由**传输信道**及两端的数据**数据电路终接设备 (DCE)** 组成。
- **传输信道**：可以是专用信道或交换信道，也可以是模拟信道或数字信道。包括通信线路和通信设备。
- **数据电路终接设备 (DCE)**：是DTE与传输信道的接口设备。
 - **基带传输**时，DCE对DTE的数据信号进行变换，使信号功率谱与信道相适应，使得数据信号适合在电缆信道中传输。
 - **频带信号**传输时，DCE具体是调制解调器，实现用基带信号调制载波信号，实现频带搬移。
 - **数据信号**在数字信道上传输时，即数字数据传输，DCE是数据服务单元，即信号格式变换，消除信号中的直流成分和防止长串1或长串0编码，信号再生和定时等。
- **DC的作用**：位于DTE与CCS之间。为数据通信提供传输通道，两端收发的是“0”或“1”的**数据信号**。

3. 中央计算机系统(CCS)

- **组成**：由**通信控制器**、**主机**及其**外围设备**组成。
- **通信控制器**：是数据电路和计算机系统的接口，管理与数据终端相连接的所有通信线路。
- **主机**：又称为中央处理机，由中央处理单元 (CPU)、主存储器、输入/输出设备及其他外围设备组成。
- **CCS的作用**：处理从DTE输入的数据信息，并将处理结果向相应的DTE输出。

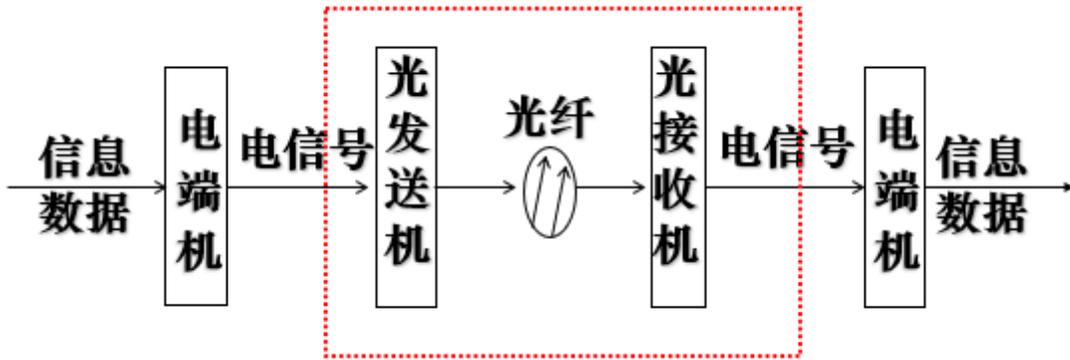
1.3 光纤通信系统的构成及各部件的作用

1.3.1 光纤的定义

以光作为信息的载体，以光纤作为传输介质的一种通信方式。

1.3.2 光纤通信系统的构成

三个基本单元：光发射机，光纤，光接收机

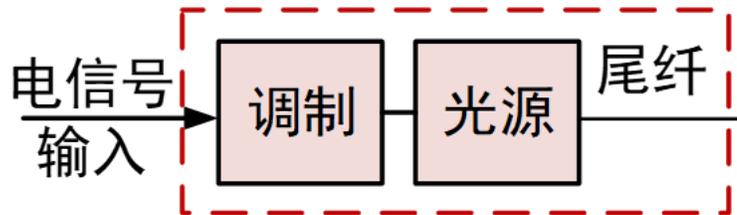


1.3.3 光纤通信系统各部件的作用

光发射机和光接收机统称为光端机。

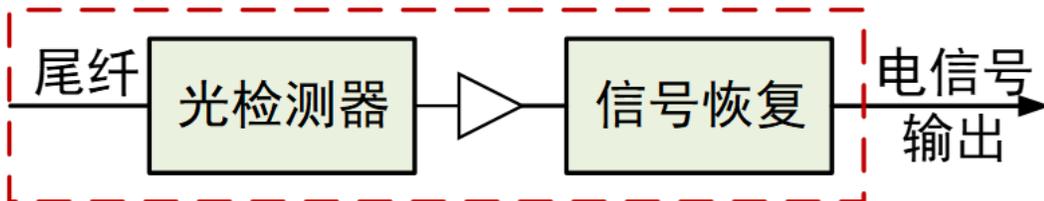
1. 光发射机

- 光发射机的部件有：①**半导体光源** ②调制电路 ③保护电路 ④光电路编码等。
- 作用**：是完成将电信号转换成光信号
- 核心部件**：半导体光源
- 。



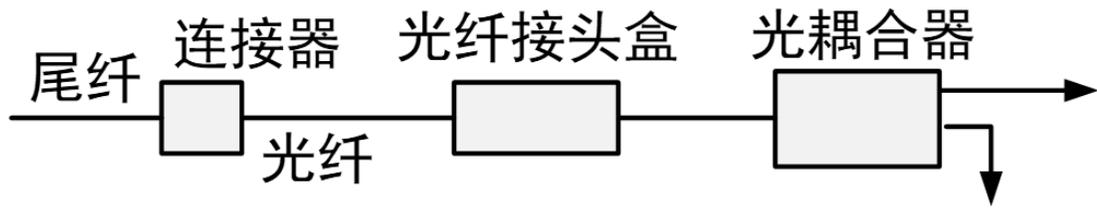
2. 光接收机

- ①**光电检测器** ②前放、AGC、主放 ③均衡、判决再生电路 ④光线路解码。
- 作用**：是将光信号转换为电信号。
- 核心部件**：光电检测器
- 。

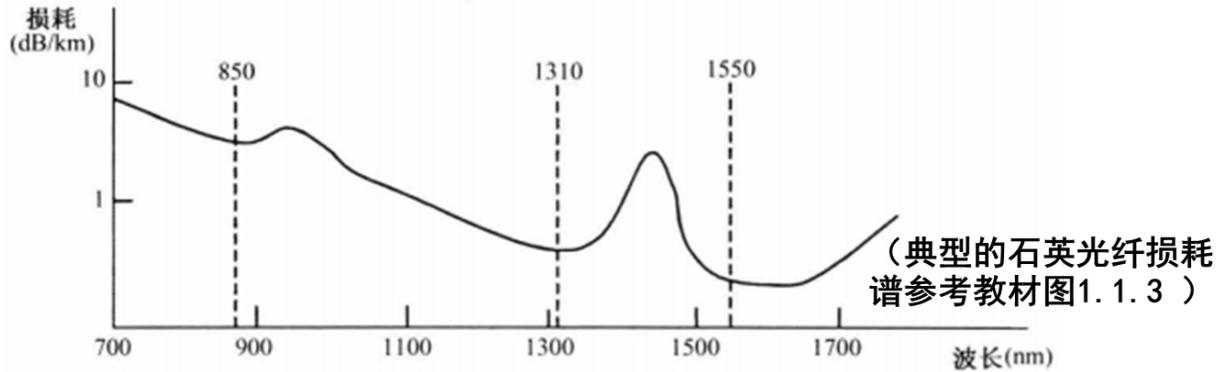


3. 光纤在实用系统中一般以光缆的形式存在；

。



1.4 光纤透光窗口特性



1. 850nm附近，损耗约2dB/km
- 1310nm附近，损耗约0.5dB/km
- 1550nm附近，损耗可降至0.2dB/km
2. 光源使用的波长范围在近红外区内，波长800-1700nm之间，属**不可见光**
3. **低损耗**是实现光信号长距离无中继传输的前提
4. 光纤的损耗特性即衰减特性

二、数据及光纤通信系统传输的相关问题

- 涉及画图，计算，简答；
- 2.1性能指标（传信速率，调制速率，信道容量，频带利用率等）
 - 2.2数据信号的基带传输（码间串扰，系统形成网络）
 - 2.3数据信号的频带传输（2ASK、2PSK、2FSK）

2.1性能指标

- (1)调制速度（也称码元速率、波特率、符号速率）
- (2)数据传信速率
- (3)数据传送速率
- (4)频带利用率 η
- (5)差错率(误码率 P_e 、误信率 P_b 、误组率 P_g)

其中(1)~(4)称为有效性指标，(5)称为可靠性指标

2.1.1调制速度

调制速度 (用 N_{Bd} 或 f_s 表示) 通常又称为码元传输速率、**码元速率**、数码率、传码率、**调制速率**、波特率。

- 定义: 码元速率是指单位时间(每秒钟)内传输码元的数目。
- 单位: 为**波特(Baud)**,常用符号“B”表示(注意, 不能用小写)

$$N_{\text{baud}} = \frac{1}{T(\text{S})}$$

- 其中: $T(s)$ 表示码元持续时间

2.1.2数据传信速率

数据传信速率 (用 R 或 f_b 表示)

- 定义: 为每秒传输的信息量(比特数), 简称信息速率, 又称传信率、比特率等。也可以说成: 每秒所传输的二进制码元数。
- 单位: **bit/s**或bps等。

$$R = N \log_2 M$$

- 其中: N 为调制速度; M 为信号进制;

1. Q1: 比特率 R 与码元速率(调制速率) N_{Bd} 之间的关系?

- ①.在二进制中, 数据传信速率 R 在**数值上**与码元速率 N_{Bd} **相等**, 但单位不同;
- ②.在多进制 M 中, N_{Bd} 与 R 之间数值不同, 单位亦不同;

2. Q2: 码元速率 N_{Bd} 与进制 M 有关吗?

码元速率与进制无关, 只与传输码元时长 T 有关。

2.1.3数据传送速率

- 定义: 单位时间内在数据传输系统中的相应设备之间**实际**传送的比特、字符或码组平均数据量, 又称有效传输速率。
- 单位: 比特/秒、字符/秒、码组/秒。
- 它是相应设备之间**实际**能达到的平均数据转移速率, 不仅与发送的比特率有关, 也与差错控制方式(监督位)、通信规程、信道差错率有关, 即与传输的效率有关。
- **总是小于数据传信速率**

2.1.4频带利用率

结合2.1.1的调制速率(符号速率) N_{Bd} 或2.1.2的数据传信速率 R 可分别求得频带利用率 η

频带利用率 (η), 即单位频带内的传输速率。表示传输数据信号的能力。

1. 利用调制速率(符号速率) N_{Bd} 求解:

$$\eta = \frac{N_{Bd}}{B}$$

单位为: $Baud/Hz$

2. 利用数据传信速率 R 求解:

$$\eta = \frac{R}{B}$$

单位为: $bit/(s \cdot Hz)$

◦ 其中 B 表示系统带宽, 单位为 Hz

2.1.5 差错率

数据传输的可靠性用**差错率**来衡量, 是衡量数据传输质量的最终指标, 它是一个统计平均值。

表示方法分为三个: 误码率 P_e 、误信率 P_b 、误组率 P_g

1. 误码率 P_e

$$P_e = \frac{\text{单位时间接收的错误码元数}}{\text{单位时间内系统传输的总码元数}}$$

2. 误信率 P_b

$$P_b = \frac{\text{单位时间接收的错误比特数}}{\text{单位时间内系统传输的总比特数}}$$

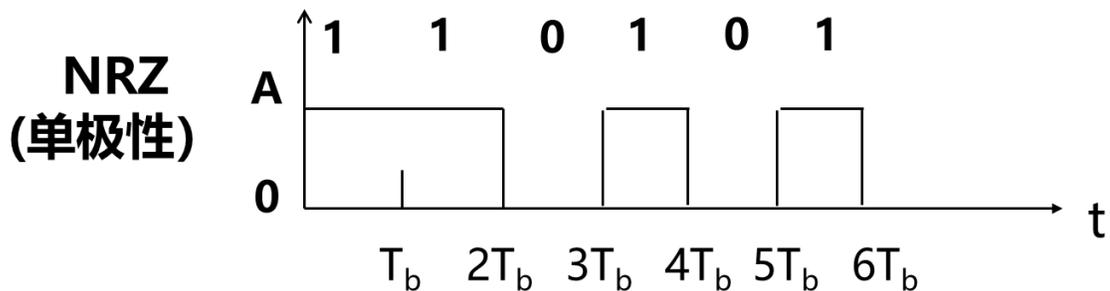
3. 误组率 P_g

$$P_g = \frac{\text{单位时间接收的错误字符(码组)数}}{\text{单位时间内系统传输的总字符(码组)数}}$$

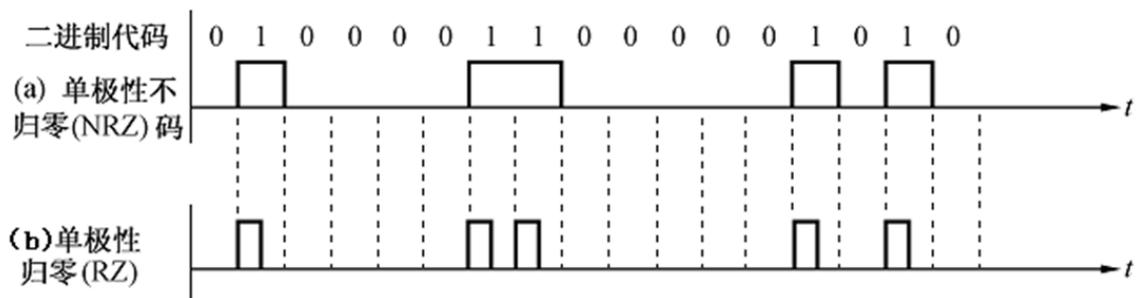
2.2 数据信号的基带传输

2.2.0 常见的信号编码

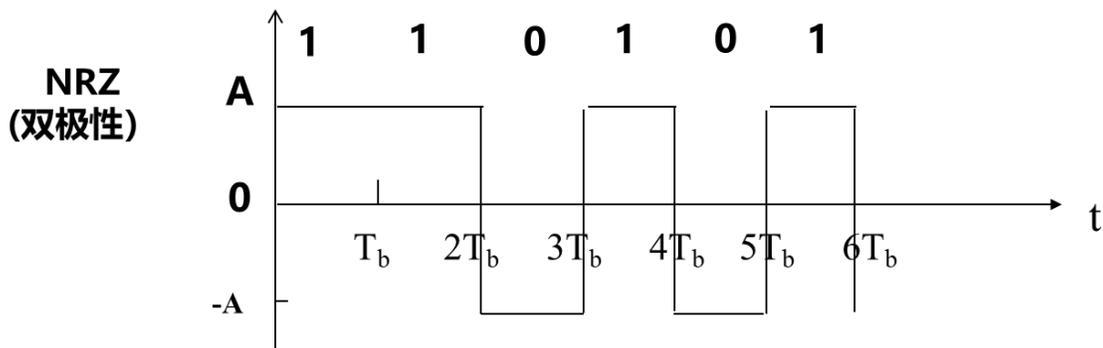
1. 单极性不归零(NRZ)码



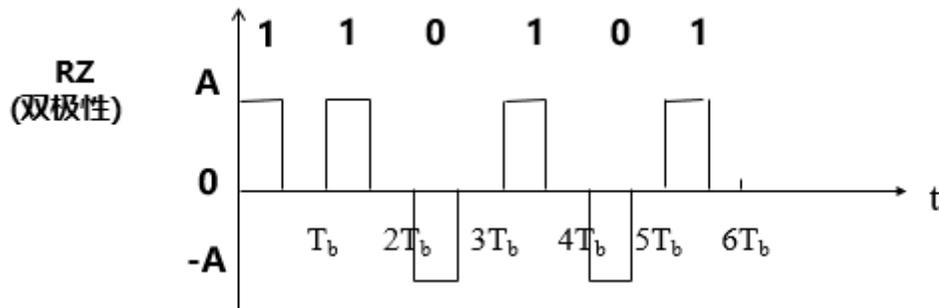
2. 单极性归零(RZ)码



3. 双极性不归零(NRZ)码



4. 双极性归零(RZ)码

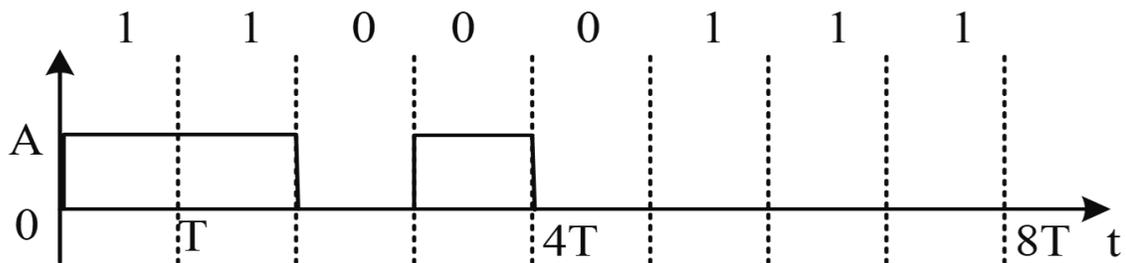


5. 差分码，又称相对码，利用相邻码元电平的跳变/不变表示信息。

“1”差分---1变，0不变。

“0”差分---0变，1不变。

数据序列11000111,矩形脉冲为例，下图画出0差分，并假定前一个1取值A



2.2.1码间串扰ISI

1. 码间串扰的物理意义是：码元彼此间的串扰。
2. 在第K个信息接收中，抽样判决，抽到的不仅是本码元（第K个信息）的样值，还有其他前面K-1, k-2个。其他的存在对本码元带来的干扰就是ISI。
3. 码间串扰是由于系统传输总特性不理想，导致前后码元的波形畸变、展宽，并使前面波形出现很长的拖尾，蔓延到当前码元的抽样时刻上，从而对当前码元的判决造成干扰。

2.2.2理想低通传输特性

- 描述：系统等效网络具有理想低通特性，且截至频率为 f_N 时，该系统允许传输的最高码元速率为 $2f_N$ ，系统输出波形在峰值点上无码间串扰(ISI)。
- 奈奎斯特频带： f_N 单位：Hz(其中带宽 $B = f_N$) 截至频率

奈奎斯特速率: $2f_N$ 单位: Baud(其中码元速率 $R_B = \frac{1}{T_B} = 2f_N$) **最高码元速率**

奈奎斯特间隔: $T = \frac{1}{2f_N}$ 单位: ms (用来判断是否存在码间串扰)

当 $t = K \cdot T$ 单位: ms。其中 T 是奈奎斯特间隔, K 为整数倍时, 无码间串扰。

无ISI基带系统的最高频带利用率(bps 和 bit/s 一样):

$$\eta = \frac{R_B}{B} = 2(\text{Baud}/\text{Hz})$$

$$\eta_b = \frac{R_b}{B} = 2\log_2 M(\text{bps}/\text{Hz})$$

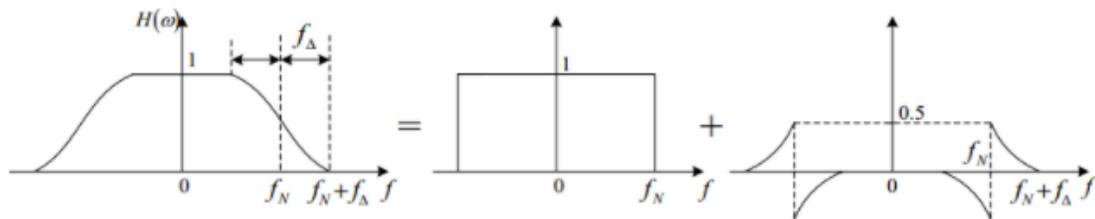
- 这一准则表明, 在采样值无失真的条件下, 在频带 f_N 内, $2f_N$ 是极限速率, 即所有数字传输系统的最高频带利用率为 $2\text{Baud}/\text{Hz}$ 。

- 理想基带传输系统的特点:

1. 满足奈奎斯特第一准则 $t = K \cdot \frac{1}{2f_N}$ (即无ISI) 其中 K 为正整数
2. 频带利用率达到 $2\text{Baud}/\text{Hz}$ 的极限;
3. 但波形尾巴衰减较慢, 摆幅大, 对定时脉冲要求**精准**;
4. 物理上**不可以**实现。

2.2.3 具有幅度滚降特性的低通形成网络

- 在实际中: 在截止频率 f_N 处按“奇对称”条件进行“圆滑滚降”。具有过渡特性, **等效理想低通特性, 无码间串扰**, 但具有**带宽展宽**; 即滚降网络是以牺牲频带利用率换取频谱的滚降特性和时域更大的拖尾衰减速率, 以消除码间串扰!
- 因此: 当我在实际传输数据时, 我希望消除码间串扰, 就一定会存在带宽展宽, 相比理想状态, 在传输相同数据量时(R_B 一致), 带宽(B)变大, 频带利用率(η)变小。即: 高的频带利用率与消除码间干扰是互相矛盾的。



- 奈奎斯特带宽 f_N 实际带宽 B 大于 f_N , 所以 f_N 又称最窄频带带宽(单位: Hz)

滚降系数 α

$$\alpha = \frac{f_\Delta}{f_N} (0 \sim 1)$$

实际带宽 B (单位: Hz)

$$B = f_N + f_\Delta = (1 + \alpha) \cdot f_N$$

码元速率 R_B 等于奈奎斯特速率 (单位: Baud)

$$R_B = \frac{1}{T_B} = 2f_N$$

频带利用率 η

$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{1 + \alpha} (\text{Baud/Hz})$$

$$\eta_b = \frac{R_b}{B} = \frac{2}{1 + \alpha} \cdot \log_2 M (\text{bps/Hz})$$

• 滚降低通形成网络的特点:

1. 满足奈奎斯特第一准则 $t = K \cdot \frac{1}{2f_N}$ (即无ISI) 其中 K 为正整数
2. 频带利用率**不能**达到 2Baud/Hz 的极限, 实际最大只能达到 $\eta = \frac{2}{1+\alpha} \text{Baud/Hz}$
3. 波形尾巴衰减**较快**, 对定时脉冲要求**较低**
4. 物理上**可以实现**

传输特性	理想低通	余弦滚降	升余弦特性
α	0	0~1	1
B (Hz)	f_N	$(1+\alpha)f_N$	$2f_N$
R_B (Baud)	$2f_N$	$2f_N$	$2f_N$
η (Baud/Hz)	2	$2/(1+\alpha)$	1
η_b (bps/Hz)	$2 \log_2 M$	$2 \log_2 M / (1+\alpha)$	$\log_2 M$
优缺点	特性 不易 实现; 响应曲线尾部收敛 慢 , 对定时要求 高	特性 易 实现, 响应曲线尾部收敛 加快 , 对定时要求 降低 。 代价: 频率利用率 降低	

$$\alpha = \frac{f_\Delta}{f_N} \quad (0 \sim 1)$$

$$B = f_N + f_\Delta = (1 + \alpha) f_N$$

$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{1 + \alpha}$$

$$\eta_b = \frac{R_b}{B} = \frac{2}{1 + \alpha} \log_2 M$$

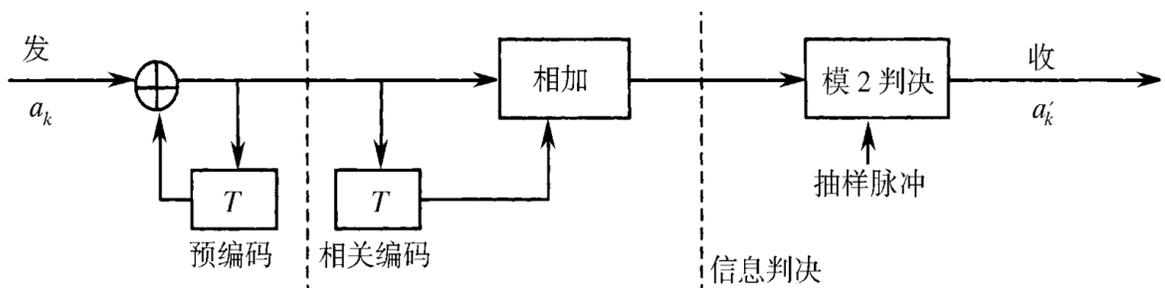
2.2.4部分响应系统

部分响应波形: 有控制地在有些码元的抽样时刻**引入码间串扰**, 并在**接收端判决前加以消除**, 从而可以达到**改善频谱特性、使频带利用率提高到理论最大值、并加速传输波形尾巴的衰减和降低对定时精度要求**的目的。通常把这种波形叫部分响应波形。利用部分响应波形传输的基带系统称为**部分响应系统**。这里主要总结**第一类和第四类**部分响应系统。

1. 第I类部分响应系统

原理: 波形 $\frac{\text{si}x}{x}$ “拖尾”严重, 但**相距一个码元间隔 T_B 的两个 $\frac{\text{si}x}{x}$ 波形的“拖尾”刚好正负相反**, 利用这样的波形组合肯定可以构成“拖尾”衰减很快的脉冲波形。**将两者合成**: 两个间隔为一个码元长度 T_s 的 $\frac{\text{si}x}{x}$ 的合成波形, “拖尾”衰减很快的响应波形。当前码元只对下一个码元产生ISI。

整个上述处理过程可概括为“**预编码—相关编码—模2判决**”过程。下图为原理方框图:



a_k 为发送信码, b_k 为预编码, C_k 为发送端相关码元, C'_k 为接收端码元, a'_k 为接收端还原信码

已知 a_k , 则我们可以解出对应的 b_k 、 C_k 、 C'_k 、 a'_k

预编码方程: $b_k = a_k \oplus b_{k-1}$ (1差分)

相关编码方程: $C_k = b_k + b_{k-1}$

接收端: $C'_k = C_k$

判决规则 $a'_k = [C_k] \bmod 2$

a_k		1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
b_k	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
C_k		1	2	1	1	2	2	2	1	0	1	1
C'_k		1	2	1	1	2	2	2	1	0	1	1
a'_k		1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1

2. 第IV类部分响应系统

原理: 用两个间隔为两个码元长度($2T_s$)的 $\frac{si x}{x}$ 波形相减来代替 $\frac{si x}{x}$ 作为基本的信号波形。当前码元只对下下一个码元产生ISI。

a_k 为发送信码, b_k 为预编码, C_k 为发送端相关码元, C'_k 为接收端码元, a'_k 为接收端还原信码

已知 a_k , 则我们可以解出对应的 b_k 、 C_k 、 C'_k 、 a'_k

预编码方程: $b_k = a_k \oplus b_{k-2}$

相关编码方程: $C_k = b_k - b_{k-2}$

接收端: $C'_k = C_k$

判决规则 $a'_k = \begin{cases} a'_k = 0 & \text{if } c'_k = 0 \\ a'_k = 1 & \text{if } c'_k = \pm 1 \end{cases}$

a_k			1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
b_k	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
C_k			-1	0	0	-1	1	0	0	1	0	-1	0	1	-1	0	1
C'_k			-1	0	0	-1	1	0	0	1	0	-1	0	1	-1	0	1
a'_k			1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1

汇总: 第一类和第四类部分响应系统的特点:

1. 有固定的、可消除的码间干扰
2. 频带利用率可达到 $2\text{Baud}/\text{Hz}$ 的极限, 与理想低通系统的频带利用率相同
3. 波形拖尾衰减快, 对定时精度要求不高
4. 是物理上可实现的系统

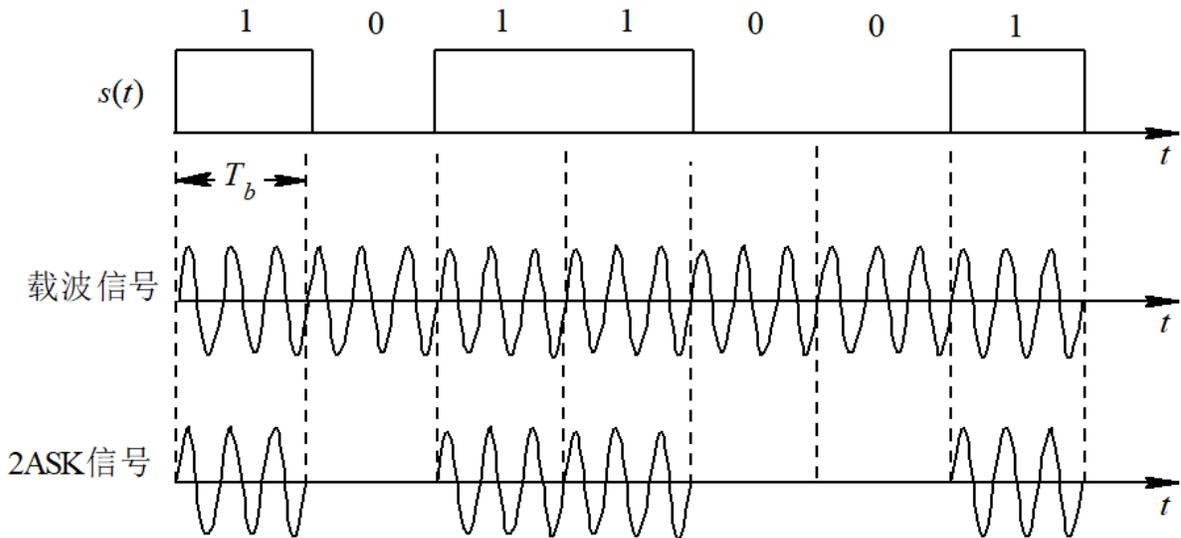
2.3数据信号的频带传输

(1)振幅调制: 用数据信号改变载波的幅度 2ASK

(2)相位调制: 用数据信号改变载波的相位 2PSK

(3)频率调制: 用数据信号改变载波的频率 2FSK

2.3.1 振幅调制2ASK



- 注: 上图假设载波频率与码元速率关系为 $f_c = 2f_s$

2.3.2 相位调制2PSK

根据载波相位表示数字信息的方式不同, 数字调相分为**绝对相移**(PSK)和**相对相移**(DPSK)

对于2PSK: 假设前后相邻码元的载波相位差为 Δ_φ , 可定义一种数字信息与 Δ_φ 之间的关系为:

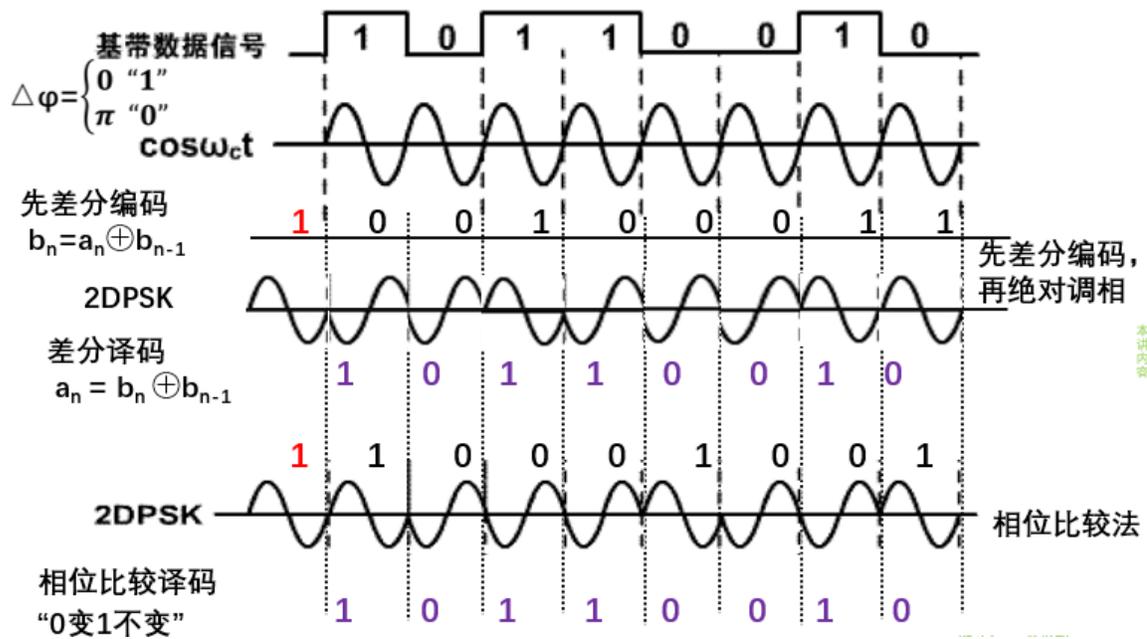
$$\Delta_\varphi = \begin{cases} 0 & \text{数字信号 0} \\ \pi & \text{数字信号 1} \end{cases}$$

当然也可以为:

$$\Delta_\varphi = \begin{cases} \pi & \text{数字信号 0} \\ 0 & \text{数字信号 1} \end{cases}$$

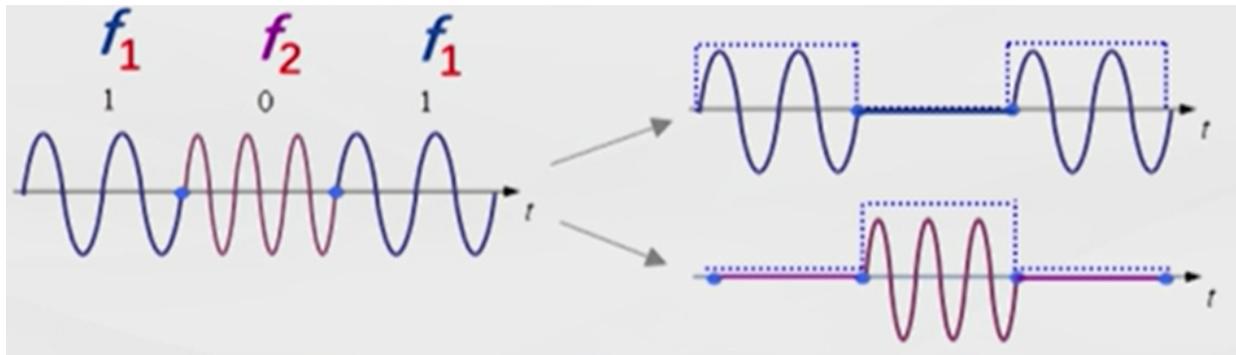
直接根据 Δ_φ 进行变化即可。下面着重总结2DPSK中的**差分编码**和**相位比较法**:

1. 对于2DPSK的差分编码: 首先对二进制数字基带信号进行 $b_n = a_n \oplus b_{n-1}$ (**1差分**) 编码得到相对码, 然后再进行绝对调相(2PSK操作), 从而产生二进制差分相位键控信号。
2. 对于2DPSK的相位比较法: 直接根据所给的 Δ_φ 前后翻转即可。



2.3.3 频率调制2FSK

2FSK可看成两个不同载频的2ASK的叠加。



三、差错控制及编码相关问题

- 涉及计算，简答；
- 3.1 差错控制
 - 3.2 汉明距离，纠检错能力
 - 3.3 线性分组码、循环码的特性
 - 3.4 监督矩阵，生成矩阵，码的生成多项式

3.1 差错控制

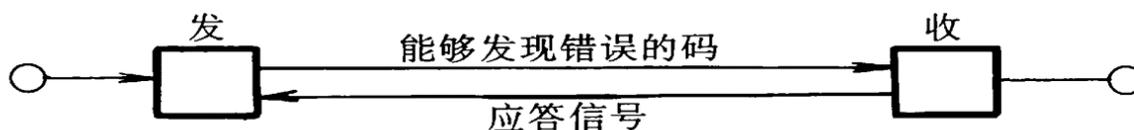
差错分为随机差错和突发差错：

1. 随机差错：随机差错又称独立差错，是指那些独立地、稀疏地和互不相关地发生的差错。
2. 突发差错：是指一串串，甚至是成片出现的差错，差错之间有相关性，差错出现是密集的。

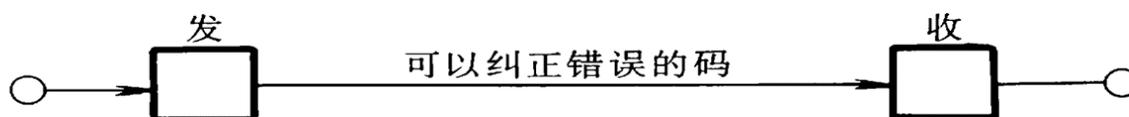
3.1.1 差错控制的基本思路

- 在被传送的信息码序列上，按照一定的规则加入若干“**监督码元**”后进行传输，这些加入的码元与原来的信息码序列之间**存在着某种确定的约束关系**。
- 在接收数据时，检验**信息码元与监督码元**之间的既定的**约束关系**，如该关系遭到破坏，则在接收端可以**发现传输中的错误，乃至纠正错误**。

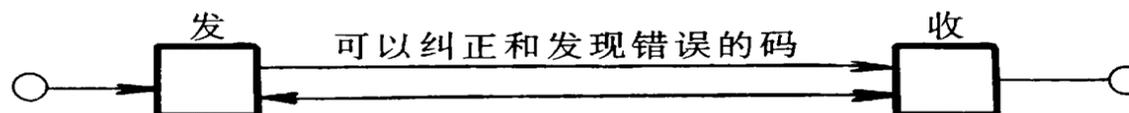
3.1.2 差错控制方式



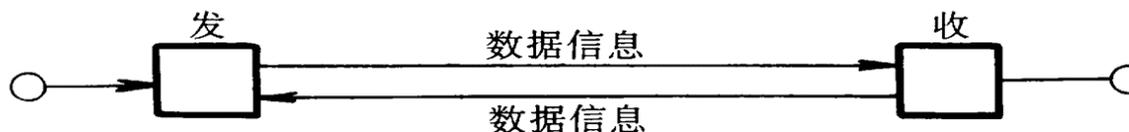
(a) 检错重发 (ARQ)



(b) 前向纠错 (FEC)



(c) 混合纠错检错 (HEC)



(d) 信息反馈 (IRQ)

1. 检错重发ARQ：只有**检错能力**： $d_{min} \geq e + 1$

思路：

1. 在发送端对数据序列进行分组编码，加入一定多余码元使之具有定的**检错能力**，成为能够发现错误的码组。
2. 接收端收到码组后，按一定规则对其进行有无错误的判别，并把判决结果（应答信号）通过反向信道送回发送端。
3. 如有错误，发送端把前面发出的信息重新传送一次，直到接收端认为已正确接收到信息为止。

重发方式分为三种：停发等候重发、返回重发、选择重发。

优缺点：

1. 需反向信道，实时性差
2. 码组中的监督码元数量相对较少，编码效率较高
3. 译码设备较简单

2. 前向纠错FEC：只有**纠错能力**： $d_{min} \geq 2 \cdot t + 1$

思路：发送端的信道编码器将输入数据序列变换成能够**纠正**错误的码，接收端的译码器根据**编码规律**检验出错误的位置并**自动**纠正。

优缺点：

1. 不需要反向信道，实时性好
2. 所选择的纠错码必须与信道的错码特性密切配合，否则很难达到降低错误的要求；为了纠正较多的错码，译码设备复杂
3. 要求附加的监督码也较多，传输效率较低

3. 混合纠错检错HEC：既有**纠错又有检错**： $d_{min} \geq e + t + 1$ 且满足 $e > t$

混合纠错检错方式是前向纠错方式和检错重发方式的结合

发送端发出同时具有检错和纠错能力的码，接收端收到码后，检查错误情况，如果**检出错误少于纠错能力，则自行纠正**；如果**干扰严重，错误很多，超出纠正能力，但能检测出来，则经反向信道要求发端重发**。

4. 信息反馈IRQ

接收端把收到的数据序列全部由反向信道送回发端，发送端比较发送的数据序列与送回的数据序列，从而发现是否有错误，并把认为错误的数据序列的原数据再次传送，直到发端没有发现错误为止。

优点：

1. 不需要纠错、检错的编译码器，设备简单。

缺点：

1. 需要和前向信道相同的反向信道，实时性差。
2. 发送端需要一定容量的存储器以存储发送码组，环路时延越大，数据速率越高，所需存储容量越大。

其中，实时性最好的是**前向纠错FEC**，实时性最差的是**信息反馈IRQ**，不需要反向信道的是**前向纠错FEC**，不需要纠错、检错编译码器的是**信息反馈IRQ**

3.2汉明距离，纠检错能力

3.2.1汉明距离

1. 任意两个许用码组间距离的最小值 d_{min}
2. 码组之间进行模二加：相同为0，相异为1，取1的个数的最小值
3. 例如：三个码组001010 101101 010001求该码组最小码距

$$\begin{array}{r} 001010 \\ \oplus 101101 \\ \hline 100111 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 001010 \\ \oplus 101101 \\ \hline 100111 \end{array}} \right\} d=4 \quad \begin{array}{r} 001010 \\ \oplus 010001 \\ \hline 011011 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 001010 \\ \oplus 010001 \\ \hline 011011 \end{array}} \right\} d=4 \quad \begin{array}{r} 101101 \\ \oplus 010001 \\ \hline 111100 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 101101 \\ \oplus 010001 \\ \hline 111100 \end{array}} \right\} d=4$$

因此： $d_{min} = 4$

3.2.2 纠检错能力

1. 检测 e 个随机错误:

$$d_{min} \geq e + 1$$

2. 纠正 t 个随机错误:

$$d_{min} \geq 2 \cdot t + 1$$

3. 纠正 t 个同时检测 e 个随机错误:

$$d_{min} \geq t + e + 1$$

注意此时解还必须还要满足:

$$e > t$$

3.3 线性分组码、循环码的特性

若码长为 n , 监督码元的个数为 r , 则要求 $2^r \geq n + 1$ 或 $2^r \geq k + r + 1$

3.3.1 线性分组码的特性

1. 封闭性

任意两个码组之逐位模2和仍为这种码中的另一个许用码组。即 A_1 和 A_2 , 线性分组码的两个许用码组, 则 $A_1 + A_2$ 仍为其中的另一个许用码组。

2. 码的最小距离等于非零码的最小重量。

因为线性分组码具有封闭性, 因而两个码组之间的距离必是另一码组的重量, 故码的最小距离即是码的最小重量 (除全“0”码组外)

3.3.2 汉明码的特性

1. 拥有封闭性和码的最小距离等于非零码的最小重量特性。

2. 监督码元的个数 $r = n - k$, 码长满足 $n = 2^r - 1$ 。 $r \geq 2$ 。

3. 无论码长 n 为多少, 汉明码最小码距 $d_{min} = 3$ 。

4. 编码效率: $\eta = \frac{k}{n} = 1 - \frac{r}{n}$ 。

3.3.3 循环码的特性

1. 封闭性

任意两个码组之逐位模2和仍为这种码中的另一个许用码组。即 A_1 和 A_2 , 线性分组码的两个许用码组, 则 $A_1 + A_2$ 仍为其中的另一个许用码组。

2. 码的最小距离等于非零码的最小重量。

因为线性分组码具有封闭性, 因而两个码组之间的距离必是另一码组的重量, 故码的最小距离即是码的最小重量 (除全“0”码组外)

3. 循环性

即循环码组中任一码组循环移位所得的码组仍为该循环码中的一个许用码组。

3.4 监督矩阵，生成矩阵，码的生成多项式

这里应当先指出：

1. 生成矩阵是发射端用来根据信息码生成监督位
2. 监督矩阵是接收端用来根据接收到的信息序列判断是否出错
3. 生成多项式只是用在循环码中，根据生成多项式可以顺序得到：监督位数、码组位数、生成矩阵(从而可以根据信息码得到监督码)、监督矩阵(从而可以判断接收端收到的信息序列是否存在错误)

由于课本先以(7,4)汉明码为例，使得典型的监督矩阵和生成矩阵是固定的，但是揭示了生成矩阵和监督矩阵之间的关系和至关重要的作用。而循环码更具有一般性，即监督矩阵和生成矩阵是由生成多项式决定，故总结以循环码为例，一并包含相关知识展开。

已知生成多项式：

1. 所给的生成多项式 $g(x)$ 必定表示为 $(0\dots 01g_{n-k-1}\dots g_2g_11)$ 其中 $g_{n-k-1}\dots g_2g_11$ 表示 r 监督位。再根据下式：

$$2^r \geq n + 1$$

即可得知码长 n ，进而得到 $k = n - r$ 信息码长。

- 例如： $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ 则 101 表示监督位， $r = 3$ 。即 $n \leq 2^r - 1 = 2^3 - 1 = 7$ 故有4位信息位，3位监督位

2. 生成矩阵用 G 表示，监督矩阵用 H 表示，这里重点指出：

$$G = I_k Q$$

$$H = P I_r$$

$$P = Q^T$$

其中 I_k 和 I_r 是单位矩阵， G 可由生成多项式(偏移并且模二加)得出，至此根据上式我们可以得到生成矩阵和监督矩阵。

- 继续上例： $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ 我们通过偏移(循环性)得出：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

通过偏移以及模二加运算可以得到 G

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 其中 } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 对此 } P = Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

注意矩阵的左侧一定要转化为单位矩阵。由此我们可以得到监督矩阵 H

$$H = P I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. => 有了生成矩阵, 从而可以根据信息码得到监督码(监督码产生):

$$[\text{监督码}] = [\text{信息码}] \cdot Q$$

注意这里的运算(e.g):

$$1001 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 \oplus 0 \times 0 \oplus 0 \times 1 \oplus 1 \times 1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

=> 有了监督矩阵, 从而可以判断收到的码组序列是否有错(监督码检测):

$$H \cdot [\text{码组序列}] = [0]$$

若全为0则表示无错, 若存在一个非零数则表示出错。 , 同样需要注意这里的运算。

4. 对于第三点, 很可能要求写出监督码产生和检测过程, 在给定的**信息码**和**生成多项式**只需要相除即可, 余数就是答案。**CRC(循环冗余检验)**

◦ 例如11100110(信息码), 生成多项式为11001, 则监督码产生的过程和监督码检错过程:

1. 还是先根据生成多项式得监督位为4位, 已给信息码8位, 则码长12位。
2. **计算监督码时, 在信息码后先补0, 直到到达码长, 然后用生成多项式相除。**
3. 假设收到的信息序列为: 111001100110。判断有无差错, **用生成多项式除以所收到信息序列。**
4. 左图为得到监督码, 右图为判断是否有无差错。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 G(x) \rightarrow 11001 \overline{) 11100110 \quad 0000} \\
 \underline{11001} \\
 10111 \\
 \underline{11001} \\
 11100 \\
 \underline{11001} \\
 101 \quad 00 \\
 \underline{110} \quad 01 \\
 11 \quad 010 \\
 \underline{11} \quad 001 \\
 \underline{\underline{0110}} \quad \leftarrow r(x)=FCS
 \end{array}
 \end{array}$$

